



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

15 februarie 2015

Clasa a VI-a

1. Fie numerele naturale nenule a, b, c, x, y, z astfel încât $bcx + acy - abz = 0$ și $a, b = 1, b, c = 1, c, a = 1$. Arătați că $a^2 b^2 c^2$ divide $x^2 + a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 + c^2$.
2. Numerele $x + y, y + z, z + x$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, 8.
- a) Aflați valoarea raportului $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$.
- b) Dacă $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}, a \neq b \neq c \neq a$, să se determine valorile maxime și minime ale raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$.
3. Fie unghiul $\angle XOY$ și numerele naturale distincte a, b . Pe (OX) considerăm în ordine punctele A_1, A_2, A_3, \dots astfel încât $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = a$. Pe (OY) considerăm în ordine punctele B_1, B_2, B_3, \dots astfel încât $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = b$.
- a) Arătați că există $A \in A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ și $B \in B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ astfel încât triunghiul OAB este isoscel.
- b) Arătați că există $A, C \in A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ și $B, D \in B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ astfel încât $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$.
4. Pe dreapta d , se consideră punctele O, A, B, C, D, E, F în această ordine, astfel încât $AB = 2OA$, B este mijlocul lui $[AC]$, C este mijlocul lui $[BD]$, D este mijlocul lui $[BE]$ și E este mijlocul lui $[BF]$.
Să se arate că:
- a) segmentele $([AE], [CD])$, respectiv $([AD], [BC])$ au același mijloc;
- b) $\frac{AC}{BE} + \frac{AB}{AD} + \frac{BC}{EF} + \frac{OA}{DE} > \frac{CF}{OE}$.

Notă

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).
- Timp de lucru: 2 ore

Soluții clasa a VI-a:

1. Din $bcx = a \cdot bz - cy$ rezultă a/bcx și cum $a, b = 1, a, c = 1$ obținem

$$a/x \Leftrightarrow x = a \cdot a_1, a_1 \in \mathbb{N}^*.$$

Din $acy = b \cdot az - cx$ rezultă b/acy și cum $a, b = 1, b, c = 1$ obținem

$$b/y \Leftrightarrow y = b \cdot b_1, b_1 \in \mathbb{N}^*.$$

Din $abz = c \cdot bx + ay$ rezultă c/abz și cum $a, c = 1, b, c = 1$ obținem

$$c/z \Leftrightarrow z = c \cdot c_1, c_1 \in \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned} \text{Avem: } x^2 + a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 + c^2 &= a^2 a_1^2 + a^2 \cdot b^2 b_1^2 + b^2 \cdot c^2 c_1^2 + c^2 = \\ &= a^2 b^2 c^2 \cdot a_1^2 + 1 \cdot b_1^2 + 1 \cdot c_1^2 + 1 \end{aligned}$$

care se divide prin $a^2 b^2 c^2$.

2. a) Avem $\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{8} = k$, de unde rezultă că:

$x + y = 4k, y + z = 6k$ și $z + x = 8k$, iar prin adunare membru cu membru a celor trei egalități obținem:

$$2x + 2y + 2z = 18k, \text{ deci } x + y + z = 9k.$$

$$\text{Dacă } x + y + z = 9k \text{ și } x + y = 4k, \text{ rezultă că } z = 5k.$$

$$\text{Dacă } x + y + z = 9k \text{ și } y + z = 6k, \text{ rezultă că } x = 3k.$$

$$\text{Dacă } x + y + z = 9k \text{ și } z + x = 8k, \text{ rezultă că } y = k.$$

$$\text{Se obține: } \frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2} = \frac{23}{35}.$$

b) Valoarea maximă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când

$$b = 9, c = 8, a = 7$$

$$(\text{deoarece } xz > yz > xy) \text{ și este } \frac{7 \cdot 3k^2 + 9 \cdot 15k^2 + 8 \cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}.$$

Valoarea minimă a raportului $\frac{axy+bxz+cyz}{x^2+y^2+z^2}$ se obține când

$$b = 1, c = 2, a = 3 \text{ (deoarece } xz > yz > xy) \text{ și este}$$

$$\frac{3 \cdot 3k^2 + 1 \cdot 15k^2 + 2 \cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{34}{35}.$$

3. a) Căutăm $A \in A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ și $B \in B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$, astfel încât

$$OA = OB \Leftrightarrow OA_i = OB_k \Leftrightarrow i \cdot a = k \cdot b. \text{ Luăm } i = b \text{ și } k = a. \text{ Rezultă } OA = OB = a \cdot b.$$

b) Cu A și B fixate ca la a), e suficient să luăm de exemplu $C \in (OX)$, astfel încât $OC = 2 \cdot OA$ și $D \in (OY)$, astfel încât $OD = 2 \cdot OB$. Rezultă

$$\triangle OAD \equiv \triangle OBC \text{ L.U.L.}$$

4. Se notează cu $OA = a$.

- Din $AB = 2OA$ se obține $AB = 2a, OB = OA + AB = 3a$;
- B este mijlocul lui $[AC] \Rightarrow OC = 5a$;
- C este mijlocul lui $[BD] \Rightarrow OD = 7a$;

- D este mijlocul lui $[BE] \Rightarrow OE = 11a$;

- E este mijlocul lui $[BF] \Rightarrow OF = 19a$.

a) 1. Segmentele ($[AE]$, $[CD]$) au același mijloc dacă $AC = DE \Leftrightarrow$

$$AC = OC - OA = 4a;$$

$$DE = OE - OD = 4a$$

Deci ($[AE]$, $[CD]$) au același mijloc.

2. Segmentele ($[AD]$, $[BC]$) au același mijloc dacă $AB = CD \Leftrightarrow$

$$AB = OB - OA = 2a$$

$$CD = OD - OC$$

Deci ($[AD]$, $[BC]$) au același mijloc.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{AC}{BE} + \frac{AB}{AD} + \frac{BC}{EF} + \frac{OA}{DE} &> \frac{CF}{OE} \Leftrightarrow \frac{OC-OA}{OE-OB} + \frac{OB-OA}{OD-OA} + \frac{OC-OB}{OF-OE} + \frac{OA}{OE-OD} > \\ &\frac{OE}{OF-OC} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5a-a}{11a-3a} + \frac{3a-a}{7a-a} + \frac{5a-3a}{19a-11a} + \frac{a}{11a-7a} > \frac{19a-5a}{11a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4a}{8a} + \frac{2a}{6a} + \frac{2a}{8a} + \frac{a}{4a} > \frac{14a}{11a} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} > \frac{14}{11} \Leftrightarrow \frac{4}{3} > \frac{14}{11} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$44 > 42.$$

Barem de corectare

Clasa a VI-a

Problema 1	Oficiu 1 p
$bcx = a \cdot bz - cy$, $a, b = 1$, $a, c = 1 \Rightarrow x = a \cdot a_1, a_1 \in N^*$	2p
$acy = b \cdot az - cx$, $a, b = 1$, $b, c = 1 \Rightarrow y = b \cdot b_1, b_1 \in N^*$	2p
$abz = c \cdot bx + ay$, $a, c = 1$, $b, c = 1 \Rightarrow z = c \cdot c_1, c_1 \in N^*$	2p
$x^2 + a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 + c^2 = a^2 b^2 c^2 \cdot a_1^2 + 1 \cdot b_1^2 + 1 \cdot c_1^2 + 1$	2p
Finalizare: $a^2 b^2 c^2$ divide $x^2 + a^2 \cdot y^2 + b^2 \cdot z^2 + c^2$	1p
TOTAL	10p

Problema 3	Oficiu 1 p
a) Scrie condiția de proporționalitate directă:	
$\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{8} = k$	1p
$x + y + z = 9k$.	1p
Determinare $x = 3k, y = k, z = 5k$	2p
Finalizare: $\frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2} = \frac{3k^2+15k^2+5k^2}{9k^2+k^2+25k^2} = \frac{23}{35}$.	1p
b) Valoarea maximă a raportului se realizează pentru	1p
$b = 9, c = 8, a = 7$ (deoarece $xz > yz > xy$)	
Calculează valoarea maximă: $\frac{7 \cdot 3k^2 + 9 \cdot 15k^2 + 8 \cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{196}{35} = \frac{28}{5}$.	1p
Valoarea minimă a raportului se realizează pentru	1p
$b = 1, c = 2, a = 3$ (deoarece $xz > yz > xy$)	
Calculează valoarea minimă: $\frac{3 \cdot 3k^2 + 1 \cdot 15k^2 + 2 \cdot 5k^2}{35k^2} = \frac{34}{35}$.	1p
TOTAL	10p

Problema 3	Oficiu	1 p
a) $OA = OB \Leftrightarrow OA_i = OB_k \Leftrightarrow i \cdot a = k \cdot b$.		3p
Luăm $i = b$ și $k = a$. Rezultă $OA = OB = a \cdot b$		2 p
b) $C \in (OX, OC = 2 \cdot OA$		1p
$D \in (OY, OD = 2 \cdot OB$		1p
Finalizare: $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$ <i>LU.L</i> .		2p
TOTAL		10p

Problema 4	Oficiu	1 p
Determinare OB, OC, OD, OE, OF		2p
a) Determinare ($[AE], [CD]$) au același mijloc		2p
Determinare ($[AD], [BC]$) au același mijloc		2p
b) $\frac{OC-OA}{OE-OB} + \frac{OB-OA}{OD-OA} + \frac{OC-OB}{OF-OE} + \frac{OA}{OE-OD} > \frac{OF-OC}{OE}$		1p
Finalizare		2p
TOTAL		10p